

KARAKTERISASI PENYELESAIAN SISTEM PERSAMAAN LINEAR ATAS ALJABAR *SUPERTROPICAL*

Nama Mahasiswa : Dian Yulianti
NRP : 1214 201 002
Dosen Pembimbing : Dr. Subiono, M.S.

ABSTRAK

Aljabar *tropical* adalah semiring idempotent sekaligus semifield. Salah satu contoh dari aljabar *tropical* yang memiliki struktur semiring idempotent sekaligus semifield yaitu aljabar max-plus. Aljabar max-plus didefinisikan sebagai $\mathbb{R}_{\max} = (\mathbb{R}_{\varepsilon}, \oplus, \otimes)$, dimana $\mathbb{R}_{\varepsilon} = \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ dengan \mathbb{R} adalah semua bilangan real, $\varepsilon \stackrel{\text{def}}{=} -\infty$, $a \oplus b \stackrel{\text{def}}{=} \max\{a, b\}$ dan $a \otimes b \stackrel{\text{def}}{=} a + b$ untuk setiap $a, b \in \mathbb{R}_{\varepsilon}$. Berbeda dengan aljabar linear biasa, aljabar max-plus tidak mempunyai elemen invers terhadap operasi \oplus . Hal ini yang menyulitkan untuk menyelesaikan sistem persamaan linear $A \otimes x = b$ di \mathbb{R}_{\max} . Oleh karena itu dikonstruksikan struktur baru yang merupakan perluasan dari \mathbb{R}_{\max} yang disebut *extended semiring tropical* yang dinotasikan sebagai $\mathbb{T} = \mathbb{R} \cup \{-\infty\} \cup \mathbb{R}^v$ dimana $\mathbb{R}^v_{-\infty} = \mathbb{R}^v \cup \{-\infty\}$ disebut ideal dari \mathbb{T} , $v : \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{R}^v_{-\infty}$ disebut pemetaan *ghost* yang memenuhi $v(a) = a, \forall a \in \mathbb{R}^v_{-\infty}$ dan $v(a) = a^v, \forall a \in \mathbb{R}$. Secara lebih umum perluasan dari aljabar *tropical* dinamakan aljabar *supertropical*. Oleh karena itu dapat digeneralisasikan penyelesaian sistem persamaan linear menggunakan relasi *ghost surpass* \models . Dengan relasi *ghost surpass* penyelesaian sistem persamaan $A \otimes x = b$ akan diperlemah menjadi $A \otimes x \models b$. Dari hasil penelitian didapatkan bahwa sistem persamaan linear tak homogen $A \otimes x \models b$ atas aljabar *supertropical* mempunyai solusi *tangible* yang tunggal jika dan hanya jika $|A| \in \mathcal{T}$ dan $(\text{adj}(A) \otimes b) \in \mathcal{T}_0^n$, serta mempunyai penyelesaian tidak tunggal jika dan hanya jika $|A| \in \mathcal{G}_0 \neq \varepsilon$ atau $(\text{adj}(A) \otimes b) \notin \mathcal{T}_0^n$. Sedangkan sistem persamaan linear homogen $A \otimes x \models \varepsilon$ atas aljabar *supertropical* mempunyai penyelesaian trivial jika dan hanya jika $|A| \in \mathcal{T}$ dan mempunyai penyelesaian tak trivial jika dan hanya jika $|A| \in \mathcal{G}_0 \neq \varepsilon$.

Kata kunci : aljabar *tropical*, aljabar *supertropical*, sistem persamaan linear.

CHARACTERIZATION OF THE SOLUTION OF SYSTEM OF LINEAR EQUATIONS OVER SUPERTROPICAL ALGEBRA

Name : Dian Yulianti
Student Identity Number : 1214 201 002
Supervisor : Dr. Subiono, M.S.

ABSTRACT

Tropical algebra is idempotent semirings and semifields. Max-plus algebra is one of many idempotent semirings and semifields. Max-plus algebra is defined as $\mathbb{R}_{\max} = (\mathbb{R}_{\varepsilon}, \oplus, \otimes)$, where $\mathbb{R}_{\varepsilon} = \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ with \mathbb{R} is the set of real numbers, $\varepsilon \stackrel{\text{def}}{=} -\infty$, $a \oplus b \stackrel{\text{def}}{=} \max\{a, b\}$ and $a \otimes b \stackrel{\text{def}}{=} a + b$ for every $a, b \in \mathbb{R}_{\varepsilon}$. In contrast to conventional linear algebra, there are no inverse elements with respect to \oplus in \mathbb{R}_{\max} . It also causes difficulty when solving linear systems of equations $A \otimes x = b$. Therefore a new structure that generalizes max-plus algebra is constructed and it is called extended tropical semiring, denoted as $\mathbb{T} = \mathbb{R} \cup \{-\infty\} \cup \mathbb{R}^v$ where $\mathbb{R}^v_{-\infty} = \mathbb{R}^v \cup \{-\infty\}$ is called ideal of \mathbb{T} , $v : \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{R}^v_{-\infty}$ is called the ghost map satisfying $v(a) = a, \forall a \in \mathbb{R}^v$ and $v^2(a) = v(a), \forall a \in \mathbb{T}$. Generally, the extension of tropical algebra is called supertropical algebra. Therefore we can generalize the method to solve system of linear equations using ghost surpass relation, then system of linear equations $A \otimes x = b$ will be weakened $A \otimes x \vDash b$. Based on the results of the study showed that characterization of the solution of $n \times n$ non-homogeneous system of linear equations $A \otimes x \vDash b$ over supertropical algebra has a unique solution if only if $|A| \in \mathcal{T}$ and $(\text{adj}(A) \otimes b) \in \mathcal{T}_0^n$. Moreover, it has an infinite numbers of solutions if only if $|A| \in \mathcal{G}_0 \neq \varepsilon$ or $(\text{adj}(A) \otimes b) \notin \mathcal{T}_0^n$. While for characterization of the solution of $n \times n$ system homogeneous of linear equations $A \otimes x \vDash \varepsilon$ over supertropical algebra has a trivial solution if and only if $|A| \in \mathcal{T}$ and a non-trivial solution if and only if $|A| \in \mathcal{G}_0 \neq \varepsilon$.

Keywords : tropical algebra, supertropical algebra, system of linear equations.